



计算物理
Chinese Journal of Computational Physics
ISSN 1001-246X, CN 11-2011/O4

《计算物理》网络首发论文

题目：求解含静态裂缝线弹性问题的一类基于物理信息神经网络算法
作者：柴博涛，陈星玓，余云龙
网络首发日期：2025-01-24
引用格式：柴博涛，陈星玓，余云龙. 求解含静态裂缝线弹性问题的一类基于物理信息神经网络算法[J/OL]. 计算物理.
<https://link.cnki.net/urlid/11.2011.O4.20250123.1552.004>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

求解含静态裂缝线弹性问题的一类基于物理信息神经网络算法

柴博涛¹, 陈星玓¹, 余云龙²✉

(1.北京工商大学数学与统计学院数据科学系,北京 100048;

2.北京应用物理与计算数学研究所,北京 100094)

*通信作者 余云龙, 博士, 副研究员, 研究方向为偏微分方程数值解 E-mail: yu_yunlong@iapcm.ac.cn

摘要 针对二维含静态裂缝线弹性问题构造了一类新的基于物理信息神经网络算法。为了处理裂缝处位移场的强间断性, 基于区域分解思想, 将计算区域分成若干个子区域, 并采用多个相互独立的神经网络分别求解各个子区域中的位移场和应力场。为了处理裂尖处应力场的强奇异性, 引入裂尖渐近场函数对神经网络的输出量进行修正, 以期显著提高计算精度。最后, 相关数值实验验证了算法的有效性。

关键词 物理信息神经网络; 静态裂缝; 多神经网络; 区域分解; 裂尖渐近场函数

中图分类号 O357.41 **文献标志码** A

A Novel Physics-Informed Neural Networks Algorithm for Linear Elastic Static Crack Problems

CHAI Botao¹, CHEN Xingding¹, YU Yunlong²✉

(1. Department of Data Science, School of Mathematics and Statistics, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China;

2. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

Abstract This paper proposes a novel Physics-Informed Neural Networks algorithm for linear elastic static crack problems. In order to handle the discontinuity of the displacement fields along the crack, we adopt independent multi-neural networks to solve all the components of the displacement and stress fields by using the domain decompositions technique. Moreover, in order to capture the singularity of the stress fields at the crack tip, we use the crack tip asymptotic field functions to modify the outputs of the multi-neural networks, which can improve the accuracy remarkably. Numerical experiments verify the efficiency of our algorithm.

Key words Physics-Informed Neural Networks; static crack; multi-neural networks; domain decomposition; crack tip asymptotic field functions

0 引言

裂缝问题广泛存在于位错演化、晶界建模和相界演化等领域。在这些领域中, 裂缝的存在不仅影响物质结构的稳定性和安全性, 而且直接关系到能源的有效开发和自然灾害的预防。因此, 对裂缝问题进行高精度的数值模拟具有十分重要的意义。采用传统的数值方法求解裂缝问题时会遇到许多困难, 例如: 有限元方法求解裂缝问题时对网格剖分要求严苛, 而且计算精度不高^[1,2]; 扩展有限元方法利用水平集函数描述裂缝的位置, 但增强基函数之间的线性相关性将导致总刚度矩阵高度病态, 计算求解代价较大^[3,4]。近年来, 随着深度学习技术的飞速发展, 其应用范围由最初的图像和语音识别逐步向科学计算领域拓展^[5-7], 这使得我们对裂缝问题的数值求解有了新的途径。

2019年, Raissi等^[8]提出了一种基于物理信息的神经网络方法(PINN)。PINN方法是深度学习

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12071469, 12471366)资助

作者简介: 柴博涛, 硕士, 研究方向为偏微分方程数值解 E-mail: 1185325798@qq.com

网络首发时间: 2025-01-24 10:21:33 网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/11.2011.04.20250123.1552.004>

技术应用于工程和科学计算领域的一个重要尝试，它将物理方程作为约束条件嵌入到神经网络的损失函数中去训练，不仅有效降低了模型对数据的依赖，而且使得预测结果满足物理方程。与传统数值方法相比，PINN方法具有三个方面的优势^[9-11]：首先，PINN方法不需要预先定义和生成计算网格，可避免与网格生成相关的计算复杂性和计算成本；其次，PINN方法可以同时求解正反问题，并且不会显著增加求解难度；最后，PINN方法非常适用于处理高维问题，其实现方式几乎与维度无关。因此，PINN方法自提出以来便受到学者们的广泛关注。

针对线弹性问题，文[12]采用多神经网络的PINN方法分别对位移场和应力场进行预测，相比于单个神经网络显著提高了计算精度。文[13]在神经网络中加入硬边界约束条件，使预测解严格满足线弹性方程的边界条件，该方法在保证计算精度的同时减少了计算区域中采样点的个数，提高了计算效率。针对含静态裂缝的线弹性问题，文[14]基于方程的弱形式来构造损失函数，由于弱形式的计算需要进行数值积分，该方法计算开销较大。为了提高位移场的预测精度，文[15]引入裂尖渐近场函数对预测的位移场进行修正。但在该方法中应力场由预测的位移场计算得到，这不仅增加了应力场计算的复杂性，而且引入了额外的计算误差。

本文拟将多神经网络策略与裂尖渐近场函数相结合来求解含静态裂缝线弹性问题。一方面，我们利用区域分解的思想沿裂缝线将计算区域分成若干个子区域，再采用多个神经网络分别对不同子区域的位移场和应力场进行预测；另一方面，与文[15]中仅对位移场进行求解的策略不同，我们通过将线弹性模型的本构方程和几何方程嵌入到损失函数中，实现了位移场和应力场的同步求解。

1 预备知识

1.1 模型问题

本节我们给出含静态裂缝的线弹性模型。考虑线弹性体 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ，外边界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ ， Γ_c 为裂缝所在的位置，如图 1 所示。相应的平衡方程和边界条件可写为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{on } \Gamma_u, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_c, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为柯西应力张量， \mathbf{f} 为单位体积力， \mathbf{u} 为位移场矢量， \mathbf{n} 为单位外法向量。

应力 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ 与应变 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$ 之间的关系由本构方程描述，其满足胡克定律，即

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}), \quad i, j = 1, 2, \quad (2)$$

其中 λ, μ 为拉梅常数， δ_{ij} 为符号函数满足

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

为简单起见，本文只考虑各向同性的线弹性体，即 $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ，但相关算法可推广至各向异性情形。

应变 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$ 与位移 $\mathbf{u} = (u_i)$ 之间的关系由几何方程描述，即

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2. \quad (3)$$

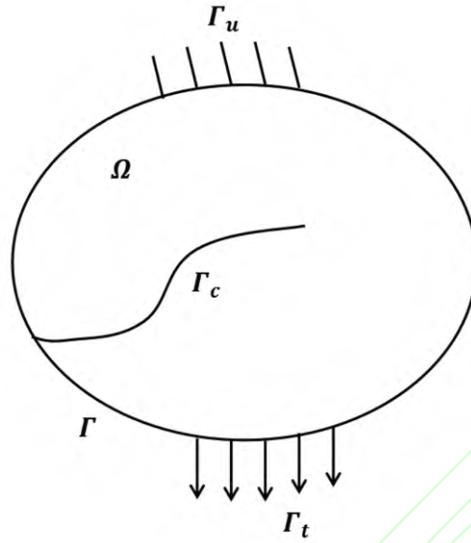


图 1 二维含静态裂缝线弹性体模型。
Fig.1 A two-dimensional model of linear elastic body with a static crack.

1.2 裂尖渐近场函数

在断裂力学中，裂尖渐近场函数^[16]是用来描述裂尖处应力奇异性的重要数学表达式。对于各向同性的线弹性体，I型裂缝的裂尖渐近场函数可写为

$$\text{位移场: } \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\text{应力场: } \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \\ 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中 (r, φ) 是以裂尖为极点的极坐标系。 K_I 表示 I 型裂缝的应力强度因子^[17]，用于表征裂尖处应力的集中程度。 κ 为膨胀模量，其表达式为

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu, & \text{平面应变,} \\ (3 - \nu) / (1 + \nu), & \text{平面应力,} \end{cases} \quad (6)$$

其中 ν 为泊松比。从裂尖渐近场函数的表达式可见，当采样点靠近裂尖时， r 趋于 0，此时应力 σ 将趋近于无穷大，裂尖处的应力呈现出强奇异性。我们必须指出的是：在裂缝问题的数值模拟中，PINN 方法能否准确捕捉到裂尖渐近场中应力的强奇异性将对计算精度产生很大的影响。

2 一类基于物理信息的新型神经网络方法

本节将构造一类基于物理信息的新型神经网络方法来分别求解模型问题 (1) 式中的位移场 \mathbf{u} 和应力场 σ 。

2.1 物理信息神经网络简介

考虑偏微分方程

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x});\beta) + f(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathcal{B}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma,\end{aligned}\quad (7)$$

其中 \mathcal{F} 为微分算子, β 为微分算子所含的未知参数, $\mathcal{B}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ 表示定解条件。

在 PINN 方法中, 我们用神经网络表达的预测函数 $\mathbf{u}_\theta(\mathbf{x})$ 来近似偏微分方程(6)式中的解函数 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 。 $\hat{\theta}$ 是一个包含神经网络权重和偏置的参数集合, 它通过优化如下极小化问题获得, 即

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \mathcal{L}(\theta; \Sigma), \quad (8)$$

其中 Σ 为训练数据集。 $\mathcal{L}(\theta; \Sigma)$ 称为损失函数, 它由监督损失项 \mathcal{L}_s 和残差损失项 \mathcal{L}_r 两部分组成, 其表达式为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta; \Sigma) &= \omega_s \mathcal{L}_s(\theta; \tau_s) + \omega_r \mathcal{L}_r(\theta; \tau_r), \\ \mathcal{L}_s(\theta; \tau_s) &= \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} |\mathcal{B}(\mathbf{u}_\theta(\mathbf{x}_i)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)|^2, \\ \mathcal{L}_r(\theta; \tau_r) &= \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} |\mathcal{F}(\mathbf{u}_\theta(\mathbf{x}_i); \beta) + f(\mathbf{x}_i)|^2,\end{aligned}\quad (9)$$

其中 $\Sigma = \{\tau_s, \tau_r\}$, $\tau_s = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N_s}, \mathbf{x}_i \in \Gamma\}$ 为标签数据集, 它采样于区域边界 Γ , N_s 为 Γ 上的监督采样点数, $\mathcal{L}_s(\theta; \tau_s)$ 用来测试预测值对边界数据的拟合程度。 $\tau_r = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N_r}, \mathbf{x}_i \in \Omega\}$ 为残差数据集, 它采样于计算区域 Ω , N_r 为 Ω 中的残差采样点数, $\mathcal{L}_r(\theta; \tau_r)$ 用来测试预测值对微分方程的拟合程度。 ω_s 和 ω_r 为是权重系数。

2.2 多神经网络策略

由万能逼近定理可知, 单个神经网络适用于拟合连续光滑的函数。在裂缝问题(1)式中, 由于位移场在裂缝处是强间断的, 为了保证计算精度, 我们利用区域分解的思想, 将计算区域分成若干个子区域, 然后构建多个相互独立的神经网络分别对每个子区域中的位移场 \mathbf{u} 和应力场 $\boldsymbol{\sigma}$ 进行拟合。

我们将裂缝 Γ_c 从裂尖延长至边界, 裂缝延长线记为 Γ_c , 如图 2 所示。此时, 裂缝 Γ_c 及其延长线 Γ_c 将计算区域 Ω 分成两个互不重叠的子区域 $\bar{\Omega}_1$ 和 $\bar{\Omega}_2$, 即

$$\partial\bar{\Omega}_1 \cap \partial\bar{\Omega}_2 = \Gamma_c \cup \tilde{\Gamma}_c.$$

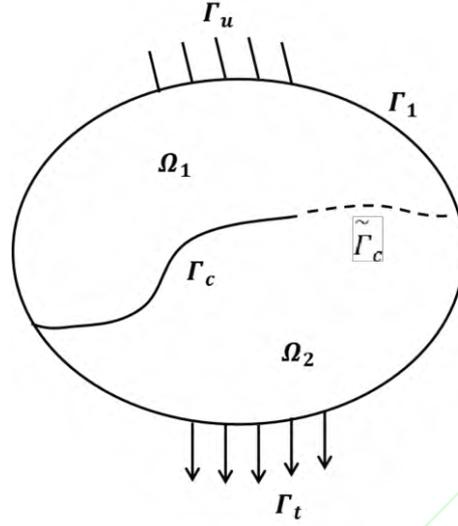
图2 区域分解示意图，黑色虚线表示裂缝延长线 $\tilde{\Gamma}_c$ 。

Fig.2 Schematic diagram of the domain decomposition, the black dashed line denotes the crack extended line $\tilde{\Gamma}_c$.

我们将子区域 $\bar{\Omega}_1$ 中的位移场记为 $\mathbf{u}^1 = (u_1^1, u_2^1)^T$ ，子区域 $\bar{\Omega}_2$ 中的位移场记为 $\mathbf{u}^2 = (u_1^2, u_2^2)^T$ 。我们对 \mathbf{u}^1 和 \mathbf{u}^2 的每个分量构造互相独立的神经网络进行求解，即

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_{1\theta}^1(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}_{u_1^1}(\mathbf{x}), \\ \bar{\mathbf{u}}_{2\theta}^1(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}_{u_2^1}(\mathbf{x}), \\ \bar{\mathbf{u}}_{1\theta}^2(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}_{u_1^2}(\mathbf{x}), \\ \bar{\mathbf{u}}_{2\theta}^2(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}_{u_2^2}(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $\mathcal{N}(\cdot)$ 表示神经网络的输出量。在裂缝延长线 $\tilde{\Gamma}_c$ 上我们取两个子区域神经网络训练解的加权平均来近似位移场，加权系数取值为 $\frac{1}{2}$ ，那么计算区域 Ω 中位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 的预测解 $\bar{\mathbf{u}}_\theta(\mathbf{x})$ 可写为

$$\bar{\mathbf{u}}_\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}_\theta^1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_1 \setminus \tilde{\Gamma}_c, \\ \bar{\mathbf{u}}_\theta^2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_2 \setminus \tilde{\Gamma}_c, \\ \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{u}}_\theta^1(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}_\theta^2(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \tilde{\Gamma}_c, \end{cases}\tag{11}$$

其中 $\bar{\mathbf{u}}_\theta^1 = (\bar{u}_{1\theta}^1, \bar{u}_{2\theta}^1)^T$ 为位移场 \mathbf{u}^1 的预测解， $\bar{\mathbf{u}}_\theta^2 = (\bar{u}_{1\theta}^2, \bar{u}_{2\theta}^2)^T$ 为位移场 \mathbf{u}^2 的预测解。由于神经网络的训练过程不受裂缝延长线 $\tilde{\Gamma}_c$ 上加权系数的影响，因此加权系数的取值并不会影响整个模型的预测精度^[15]。

同理，我们将子区域 $\bar{\Omega}_1$ 中的应力场记为 $\boldsymbol{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^1 & \sigma_{12}^1 \\ \sigma_{21}^1 & \sigma_{22}^1 \end{pmatrix}$ ，子区域 $\bar{\Omega}_2$ 中的应力场记为

$\boldsymbol{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 \end{pmatrix}$ 。我们对 $\boldsymbol{\sigma}^1$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 的每个分量构造相互独立的神经网络进行求解，即

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11\theta}^1(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}_{\sigma_{11}^1}(\mathbf{x}), \\
\bar{\sigma}_{22\theta}^1(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}_{\sigma_{22}^1}(\mathbf{x}), \\
\bar{\sigma}_{12\theta}^1(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}_{\sigma_{12}^1}(\mathbf{x}), \\
\bar{\sigma}_{11\theta}^2(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}_{\sigma_{11}^2}(\mathbf{x}), \\
\bar{\sigma}_{22\theta}^2(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}_{\sigma_{22}^2}(\mathbf{x}), \\
\bar{\sigma}_{12\theta}^2(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}_{\sigma_{12}^2}(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{12}$$

注意到：对于各向同性的线弹性体有 $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ 。裂缝延长线 $\tilde{\Gamma}_c$ 上应力场取两个子区域应力场的加权平均，那么计算区域 Ω 中应力场 σ 的预测解 $\bar{\sigma}_\theta(\mathbf{x})$ 可写为

$$\bar{\sigma}_\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{\sigma}_\theta^1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_1 \setminus \tilde{\Gamma}_c, \\ \bar{\sigma}_\theta^2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_2 \setminus \tilde{\Gamma}_c, \\ \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_\theta^1(\mathbf{x}) + \bar{\sigma}_\theta^2(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \tilde{\Gamma}_c, \end{cases} \tag{13}$$

其中 $\bar{\sigma}_\theta^1 = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11\theta}^1 & \bar{\sigma}_{12\theta}^1 \\ \bar{\sigma}_{21\theta}^1 & \bar{\sigma}_{22\theta}^1 \end{pmatrix}$ 为应力场 σ^1 的预测解， $\bar{\sigma}_\theta^2 = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11\theta}^2 & \bar{\sigma}_{12\theta}^2 \\ \bar{\sigma}_{21\theta}^2 & \bar{\sigma}_{22\theta}^2 \end{pmatrix}$ 为应力场 σ^2 的预测解。

2.3 对神经网络预测值的修正

本节我们将利用裂尖渐近场函数对 2.2 节中神经网络的预测值进行修正，以期进一步提高预测解的精度。我们把预测解 $\bar{\mathbf{u}}_\theta(\mathbf{x})$ 和 $\bar{\sigma}_\theta(\mathbf{x})$ 代入裂尖渐近场函数中进行训练，来捕捉解在裂尖处的强奇异性。将 (10) 式和 (12) 式分别代入裂尖渐近场函数 (4) 式和 (5) 式中，可得修正后的神经网络表达式，即

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{1\theta}^1(\mathbf{x}) &= \frac{\bar{\mathbf{u}}_{1\theta}^1(\mathbf{x})}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right), \\
\mathbf{u}_{2\theta}^1(\mathbf{x}) &= -\frac{\bar{\mathbf{u}}_{2\theta}^1(\mathbf{x})}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right), \\
\sigma_{11\theta}^1(\mathbf{x}) &= \frac{\bar{\sigma}_{11\theta}^1(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right), \\
\sigma_{22\theta}^1(\mathbf{x}) &= \frac{\bar{\sigma}_{22\theta}^1(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right), \\
\sigma_{12\theta}^1(\mathbf{x}) &= \frac{\bar{\sigma}_{12\theta}^1(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}, \\
\mathbf{u}_{1\theta}^2(\mathbf{x}) &= \frac{\bar{\mathbf{u}}_{1\theta}^2(\mathbf{x})}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right), \\
\mathbf{u}_{2\theta}^2(\mathbf{x}) &= -\frac{\bar{\mathbf{u}}_{2\theta}^2(\mathbf{x})}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right), \\
\sigma_{11\theta}^2(\mathbf{x}) &= \frac{\bar{\sigma}_{11\theta}^2(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right), \\
\sigma_{22\theta}^2(\mathbf{x}) &= \frac{\bar{\sigma}_{22\theta}^2(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right), \\
\sigma_{12\theta}^2(\mathbf{x}) &= \frac{\bar{\sigma}_{12\theta}^2(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

从 (13) 式可见, 随着采样点趋近于裂尖, 极半径 r 趋于零, 分式 $\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}$ 的值趋于无穷大。此时, 裂尖处的应力预测值也趋近于无穷大, 满足了应力场在裂尖处的强奇异性特征。此时, 计算区域 Ω 上的损失函数 $\mathcal{L}(\theta; \Sigma)$ 可写为

$$\mathcal{L}(\theta; \Sigma) = \mathcal{L}_s(\theta; \tau_s) + \mathcal{L}_r(\theta; \tau_r) + \mathcal{L}_c(\theta; \tau_c), \tag{15}$$

其中 \mathcal{L}_s 和 \mathcal{L}_r 为监督损失项和残差损失项, 其表达式为

$$\mathcal{L}_s(\theta; \tau_s) = \sum_{m=1}^2 \frac{1}{N_s^m} \sum_{i=1}^{N_s^m} \left[\left| \mathbf{u}_{1\theta}^m(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}_1^m(\mathbf{x}_i) \right|^2 + \left| \mathbf{u}_{2\theta}^m(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}_2^m(\mathbf{x}_i) \right|^2 \right. \tag{16}$$

$$\left. + \left| \sigma_{11\theta}^m(\mathbf{x}_i) - \sigma_{11}^m(\mathbf{x}_i) \right|^2 + \left| \sigma_{22\theta}^m(\mathbf{x}_i) - \sigma_{22}^m(\mathbf{x}_i) \right|^2 + \left| \sigma_{12\theta}^m(\mathbf{x}_i) - \sigma_{12}^m(\mathbf{x}_i) \right|^2 \right],$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_r(\theta; \tau_r) &= \sum_{m=1}^2 \frac{1}{N_r^m} \sum_{i=1}^{N_r^m} \left[\left| \sigma_{11\theta, x_1}^m(\mathbf{x}_i) + \sigma_{12\theta, x_2}^m(\mathbf{x}_i) + \mathbf{f}_1^m(\mathbf{x}_i) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left| \sigma_{12\theta, x_1}^m(\mathbf{x}_i) + \sigma_{22\theta, x_2}^m(\mathbf{x}_i) + \mathbf{f}_2^m(\mathbf{x}_i) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left| (\lambda + 2\mu) \boldsymbol{\varepsilon}_{11\theta}^m(\mathbf{x}_i) + \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{22\theta}^m(\mathbf{x}_i) - \sigma_{11\theta}^m(\mathbf{x}_i) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left| (\lambda + 2\mu) \boldsymbol{\varepsilon}_{22\theta}^m(\mathbf{x}_i) + \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{11\theta}^m(\mathbf{x}_i) - \sigma_{22\theta}^m(\mathbf{x}_i) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left| 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{12\theta}^m(\mathbf{x}_i) - \sigma_{12\theta}^m(\mathbf{x}_i) \right|^2 \right],
\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $N_s^m (m=1,2)$ 表示子区域 Ω_m 外边界上的监督点采样数, N_r^m 表示子区域 Ω_m 中的残差点采样数, f_i^m 表示子区域 Ω_m 中的单位体积力。 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij\theta}^m (i,j=1,2)$ 将 Ω_m 中位移场预测解 $\mathbf{u}_{i\theta}^m (i=1,2)$ 代入(3)式几何方程计算得到, $\boldsymbol{\sigma}_{ij\theta,x_i}^m$ 表示 Ω_m 中应力场预测解 $\boldsymbol{\sigma}_{ij\theta}^m$ 对于 x_i 的偏导数。注意到: 区别于标准 PINN 方法的残差损失项仅包含平衡方程, 我们将本构方程(2)式和几何方程(3)式也嵌入到了残差损失项之中。

\mathcal{L}_c 为裂缝延长线 $\tilde{\Gamma}_c$ 上的损失项, 其表达式为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c(\theta; \tau_c) = & \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} [|u_{1\theta}^1(\mathbf{x}_i) - u_{1\theta}^2(\mathbf{x}_i)|^2 + |u_{2\theta}^1(\mathbf{x}_i) - u_{2\theta}^2(\mathbf{x}_i)|^2 \\ & + |\sigma_{11\theta}^1(\mathbf{x}_i) - \sigma_{11\theta}^2(\mathbf{x}_i)|^2 + |\sigma_{22\theta}^1(\mathbf{x}_i) - \sigma_{22\theta}^2(\mathbf{x}_i)|^2 \\ & + |\sigma_{12\theta}^1(\mathbf{x}_i) - \sigma_{12\theta}^2(\mathbf{x}_i)|^2], \end{aligned} \quad (18)$$

其中数据集 $\tau_c = \{ \mathbf{x}_i |_{i=1}^{N_c}, \mathbf{x}_i \in \tilde{\Gamma}_c \}$ 采样于裂缝延长线 $\tilde{\Gamma}_c$ 上, 采样点个数为 N_c , \mathcal{L}_c 用来测试位移场和应力场的预测解在裂缝延长线处的连续性。

求解裂缝问题(1)式的神经网络结构示意图如图 3 所示。

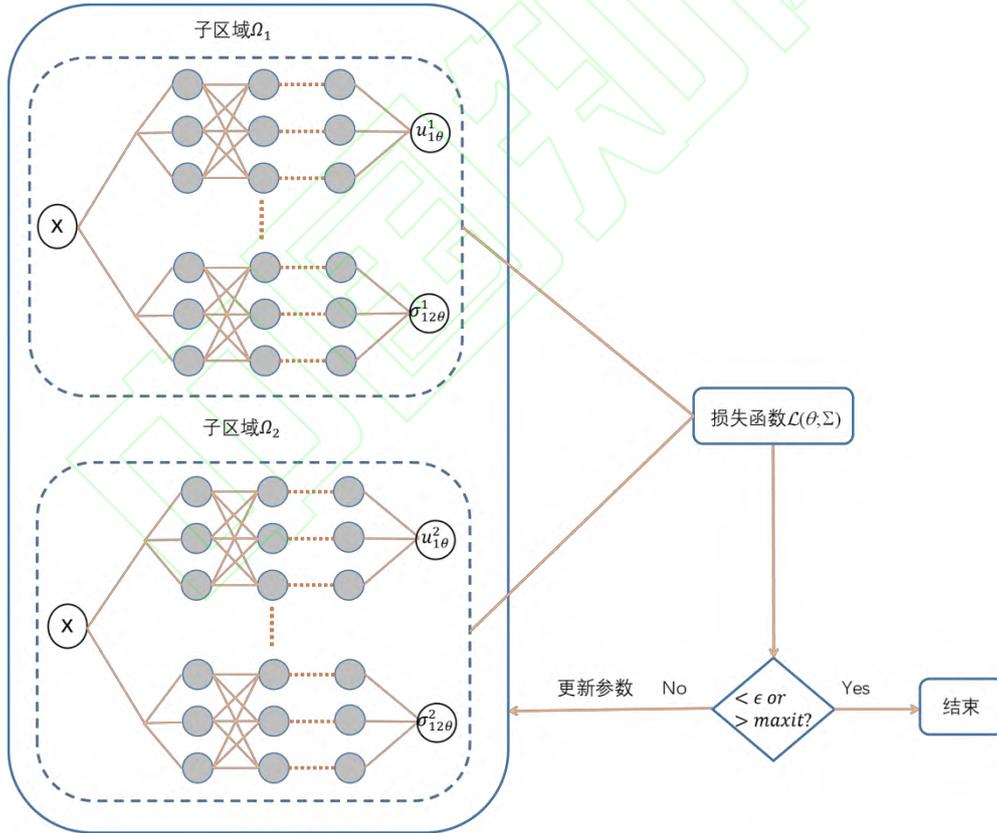


图 3 求解含静态裂缝线弹性问题的神经网络结构示意图。 ϵ 表示误差阈值, maxit 表示最大迭代次数。

Fig.3 Schematic diagram of the neural network structure for solving the model problem. ϵ represents the error threshold and maxit represents the maximum number of iterations.

3 数值实验

本节, 我们以单轴拉伸边裂纹板模型为例来考察算法的有效性。假设方形板长 $L = 2m$, 杨氏模量

$E=10GPa$ ，泊松比 $\nu=0.3$ ，上下边界受到拉伸力 $\sigma=1MPa$ ，右侧边界固定，左侧边界不受力，裂缝长 $1m$ ，如图 4 所示。

我们采用全连接神经网络，激活函数选择 swish 函数，数据类型为 64 位浮点型。实验中采样点总数 $N=10000$ ，其中监督点采样数为 $N_s^1=N_s^2=2000$ ，残差点采样数为 $N_r^1=N_r^2=2500$ ，裂缝延长线 $\tilde{\Gamma}_c$ 上采样数为 $N_c=1000$ 。数值实验是在深度学习框架 PyTorch 1.13.1 版本下实现的，训练过程中采用 Adam 优化器^[18]来优化损失函数，优化次数达到 10000 次或损失函数小于 10^{-7} 时迭代终止。采用相对 L_2 误差作为评判标准，以 x 方向的位移分量 u_1 的误差为例，其定义如下

$$\|e_{u_1}\|_2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{test}} |u_{1\theta}(\mathbf{x}_i) - u_1(\mathbf{x}_i)|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{test}} |u_1(\mathbf{x}_i)|^2}}, \quad (19)$$

其中 $u_1(\mathbf{x}_i)$ 为参考解，数据来源于文[19]的数据库。 $u_{1\theta}(\mathbf{x}_i)$ 是神经网络预测解， $N_{test}=10000$ 为测试集的采样点数。

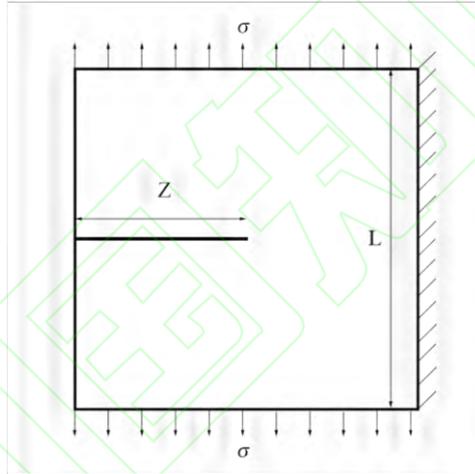


图 4 单轴拉伸的边裂纹板模型。

Fig.4. The model of the uniaxial tensile single-edge crack plate.

我们分别采用标准 PINN 方法、只采用多神经网络的 PINN 方法以及本文构造的新型 PINN 方法来求解该模型问题。

3.1 标准 PINN 方法

表 1 给出了采用标准 PINN 方法求解时，位移场和应力场各分量的相对 L_2 误差。图 5 给出了位移场和应力场各分量预测解和真实解之间的逐点误差。从数值结果可见，由于标准 PINN 方法没有处理裂缝处的位移不连续性以及裂尖处的应力强奇异性，即使不断增加隐藏层和神经元的数量，仍无法改善计算精度。

表1 采用标准PINN方法求解时位移场和应力场的相对 L_2 误差。Table 1 Relative L_2 errors of displacement and stress fields solved by the standard PINN method .

隐藏层数	神经元数	$\ e_{u_1}\ _2$	$\ e_{u_2}\ _2$	$\ e_{\sigma_{11}}\ _2$	$\ e_{\sigma_{22}}\ _2$	$\ e_{\sigma_{12}}\ _2$
2	32	1.6350×10^{-1}	1.0129	3.6445×10^{-1}	5.4673×10^{-1}	9.4097×10^{-1}
	64	1.5218×10^{-1}	1.0876	6.4124×10^{-1}	3.2141×10^{-1}	5.8767×10^{-1}
	128	1.5120×10^{-1}	1.0208	3.5009×10^{-1}	5.4085×10^{-1}	9.1057×10^{-1}
3	32	1.4711×10^{-1}	1.0211	3.0926×10^{-1}	5.3186×10^{-1}	9.2388×10^{-1}
	64	1.7854×10^{-1}	1.0352	6.5321×10^{-1}	4.2345×10^{-1}	7.3521×10^{-1}
	128	1.5362×10^{-1}	1.0101	3.2150×10^{-1}	6.2174×10^{-1}	1.0117
4	32	1.5581×10^{-1}	1.0229	3.1983×10^{-1}	5.9114×10^{-1}	9.5827×10^{-1}
	64	1.4636×10^{-1}	1.0632	3.4523×10^{-1}	4.4573×10^{-1}	8.3525×10^{-1}
	128	1.2884×10^{-1}	1.0331	2.8346×10^{-1}	4.9972×10^{-1}	8.6078×10^{-1}
5	32	1.6427×10^{-1}	1.0188	3.3399×10^{-1}	6.2516×10^{-1}	9.9476×10^{-1}
	64	1.4111×10^{-1}	1.0317	2.8266×10^{-1}	9.3126×10^{-1}	5.5801×10^{-1}
	128	1.5060×10^{-1}	1.0427	3.1440×10^{-1}	5.2197×10^{-1}	9.3476×10^{-1}

3.2 多神经网络的 PINN 方法

表 2 给出了采用多神经网络的 PINN 方法求解时，位移场和应力场各分量的相对 L_2 误差，图 6 给出了位移场和应力场各分量预测解和真实解之间的逐点误差。由于构建了多个神经网络来处理裂缝处位移场的不连续性，随着隐藏层和神经元数量的增加，位移场的相对 L_2 误差可以下降至 10^{-2} 。但由于缺少对裂尖处应力场强奇异性的处理，应力场的计算精度仅为 10^{-1} 。此外，从图 6 可见，仅采用多神经网络的 PINN 方法对应力场的拟合效果仍然较差。

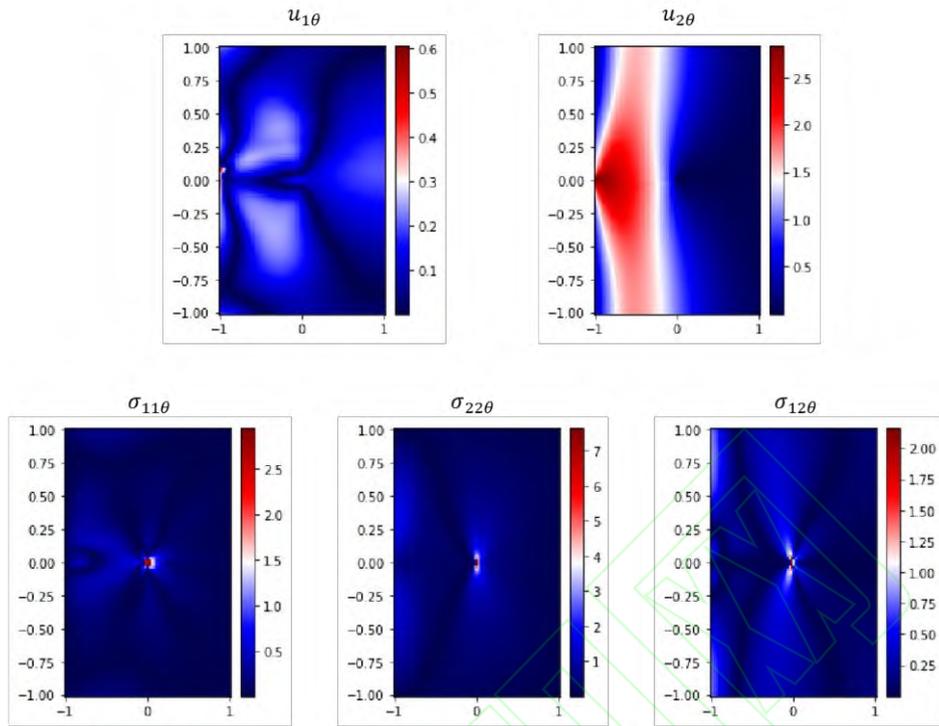


图 5 采用标准 PINN 方法预测位移场和应力场的逐点误差图。

Fig.5 Point-wise error plots for the displacement and stress fields obtained by using the standard PINN method .

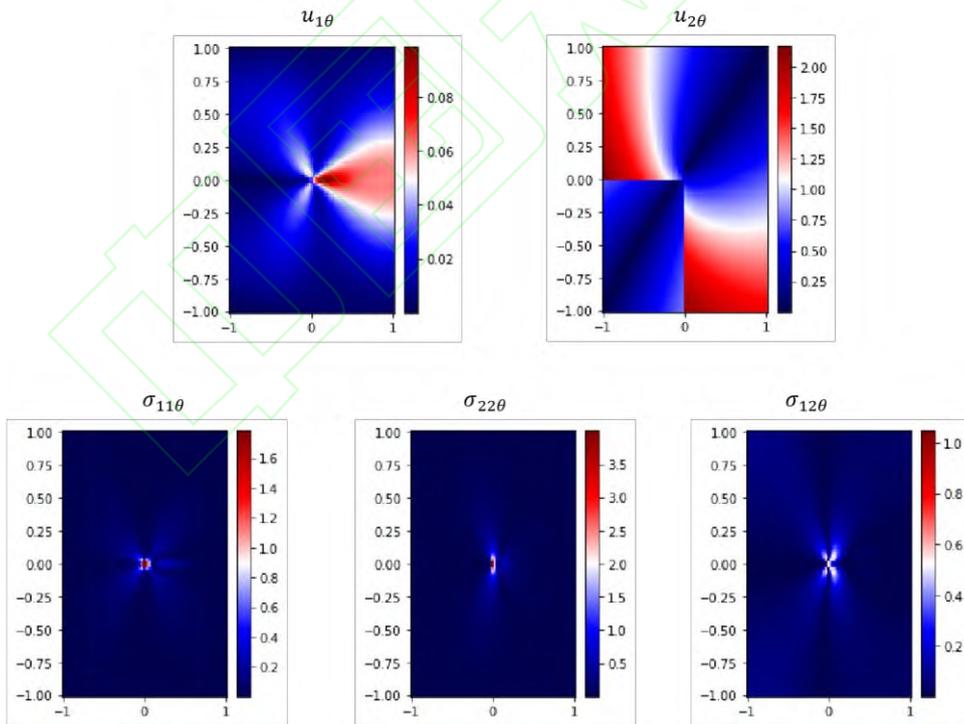


图 6 采用多神经网络的 PINN 方法预测位移场和应力场各分量的逐点误差图。

Fig.6 Point-wise error plots for the displacement and stress fields obtained by using the multi-neural network PINN method.

表2 采用多神经网络的PINN方法求解时位移场和应力场的相对 L_2 误差。Table 2 Relative L_2 errors of displacement and stress fields solved by the multi-neural network PINN method.

隐藏层数	神经元数	$\ e_{u_1}\ _2$	$\ e_{u_2}\ _2$	$\ e_{\sigma_{11}}\ _2$	$\ e_{\sigma_{22}}\ _2$	$\ e_{\sigma_{12}}\ _2$
2	32	1.0182×10^{-1}	9.25687×10^{-2}	3.1285×10^{-1}	3.1924×10^{-1}	6.5771×10^{-1}
	64	9.0291×10^{-2}	9.4577×10^{-2}	2.7087×10^{-1}	3.0946×10^{-1}	6.0059×10^{-1}
	128	1.0161×10^{-2}	1.0056×10^{-2}	2.9628×10^{-1}	3.2294×10^{-1}	6.2673×10^{-1}
3	32	6.3074×10^{-2}	8.8176×10^{-2}	2.6395×10^{-1}	2.8737×10^{-1}	5.7568×10^{-1}
	64	7.5396×10^{-2}	8.1367×10^{-2}	2.7087×10^{-1}	2.9321×10^{-1}	5.7467×10^{-1}
	128	6.3464×10^{-2}	8.5676×10^{-2}	2.5486×10^{-1}	2.8940×10^{-1}	5.5709×10^{-1}
4	32	6.5014×10^{-2}	8.7885×10^{-2}	2.5383×10^{-1}	2.8712×10^{-1}	5.3815×10^{-1}
	64	5.6411×10^{-2}	8.0726×10^{-2}	2.3453×10^{-1}	2.7443×10^{-1}	5.1570×10^{-1}
	128	5.7569×10^{-2}	8.9359×10^{-2}	2.4283×10^{-1}	2.7907×10^{-1}	5.2627×10^{-1}
5	32	4.7132×10^{-2}	8.6912×10^{-2}	2.4046×10^{-1}	2.8155×10^{-1}	5.3523×10^{-1}
	64	4.9649×10^{-2}	7.9312×10^{-2}	2.2932×10^{-1}	2.6178×10^{-1}	5.5029×10^{-1}
	128	6.2045×10^{-2}	8.9147×10^{-2}	2.3935×10^{-1}	2.8925×10^{-1}	5.3640×10^{-1}

3.3 修正后的多神经网络 PINN 方法

表 3 给出了采用裂尖渐近场函数修正后的多神经网络 PINN 方法求解时，位移场和应力场各分量的相对 L_2 误差。图 7 给出了位移场和应力场预测解和真实解各分量之间的逐点误差。从表 3 可见，即便只采用两个隐藏层，隐藏层神经元个数为 64 时，位移场和应力场预测解的相对 L_2 误差可下降至 10^{-4} 。此外，随着隐藏层和神经元数量的增加，其相对误差可降至 10^{-5} 。从图 7 可见，采用裂尖渐近场函数修正后，裂尖处应力场预测解的精度与其他区域保持一致，逐点误差可下降至 10^{-5} 。

表3 采用修正后的多神经网络PINN方法求解时位移场和应力场各分量的相对 L_2 误差。Table 3 Relative L_2 errors of displacement and stress fields solved by the revised multi-neural network PINN method .

隐藏层数	神经元数	$\ e_{u_1}\ _2$	$\ e_{u_2}\ _2$	$\ e_{\sigma_{11}}\ _2$	$\ e_{\sigma_{22}}\ _2$	$\ e_{\sigma_{12}}\ _2$
2	32	6.7348×10^{-4}	4.4045×10^{-4}	5.54135×10^{-3}	1.8910×10^{-3}	2.4893×10^{-3}
	64	2.6599×10^{-4}	1.0397×10^{-4}	7.7810×10^{-4}	4.1060×10^{-4}	1.9296×10^{-4}
	128	3.45487×10^{-4}	3.6220×10^{-4}	2.0948×10^{-4}	3.7028×10^{-4}	1.9235×10^{-4}
3	32	4.4385×10^{-4}	2.2504×10^{-4}	1.4227×10^{-3}	3.0269×10^{-4}	1.1406×10^{-3}
	64	8.5369×10^{-6}	2.1215×10^{-5}	4.9086×10^{-5}	4.2313×10^{-5}	8.8447×10^{-5}
	128	7.81343×10^{-5}	1.6426×10^{-5}	7.5022×10^{-5}	4.0326×10^{-5}	5.7083×10^{-5}
4	32	3.4887×10^{-5}	7.8694×10^{-6}	1.9120×10^{-4}	4.1168×10^{-4}	9.8964×10^{-5}
	64	3.4471×10^{-5}	2.1196×10^{-5}	2.3962×10^{-5}	3.2293×10^{-5}	6.3055×10^{-5}
	128	1.5949×10^{-5}	8.7906×10^{-6}	1.1647×10^{-4}	3.7569×10^{-5}	3.6856×10^{-4}
5	32	3.3663×10^{-5}	2.5586×10^{-5}	2.8706×10^{-4}	1.6639×10^{-4}	5.4390×10^{-4}
	64	3.4456×10^{-6}	5.9472×10^{-6}	3.7780×10^{-5}	2.4322×10^{-5}	3.0986×10^{-5}
	128	9.9693×10^{-6}	1.2885×10^{-6}	9.2068×10^{-5}	6.2295×10^{-5}	3.0981×10^{-5}

当神经网络模型采用 4 个隐藏层，每个隐藏层有 64 个神经元时，我们将裂缝延长线上采样点数从 1000 个增加到 2000 个和 3000 个，相应的数值结果见表 4。从数值结果可见，增加裂缝延长线上采样点个数并不会进一步提高计算精度。因此，从计算效率的角度考虑，在裂缝延长线上采样 1000 个点即可。

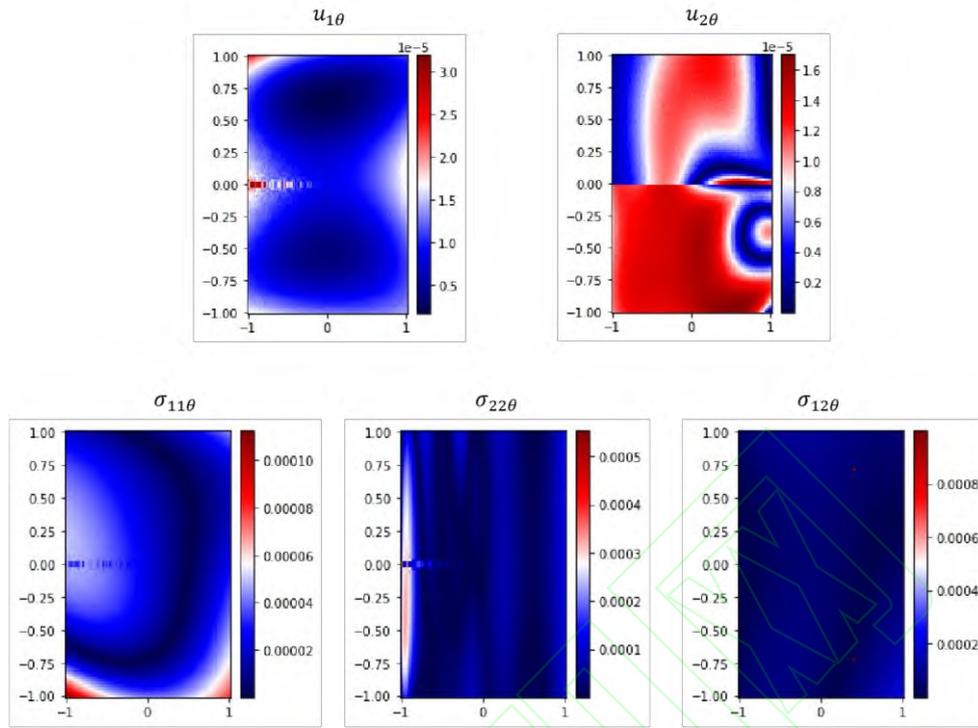


图7 采用修正后的多神经网络 PINN 方法预测位移场和应力场各分量的逐点误差图。

Fig.7 Point-wise error plots for the displacement and stress fields solved by using the revised multi-neural network PINN method.

表4 裂缝延长线 $\tilde{\Gamma}_c$ 上采样点数不同时位移场和应力场各分量的相对 L_2 误差。

Table 4 Relative L_2 errors of displacement and stress fields with the different number of sampling points on the crack extension line.

N_c	$\ e_{u_1}\ _2$	$\ e_{u_2}\ _2$	$\ e_{\sigma_{11}}\ _2$	$\ e_{\sigma_{22}}\ _2$	$\ e_{\sigma_{12}}\ _2$
1000	3.4471×10^{-5}	2.1196×10^{-5}	2.3962×10^{-5}	3.2293×10^{-5}	6.3055×10^{-5}
2000	3.1141×10^{-5}	6.5258×10^{-6}	8.3457×10^{-5}	1.3572×10^{-4}	2.4464×10^{-5}
3000	3.9944×10^{-5}	1.9509×10^{-5}	6.1516×10^{-5}	7.4080×10^{-4}	2.3205×10^{-5}

从上述数值结果可见，本文所构造的新型 PINN 方法不仅处理了裂缝处解的强间断性，而且利用裂尖渐近场函数修正预测值处理了裂尖处解的强奇异性，从而得到令人满意的计算精度。

4 结论

本文构造了一类基于物理信息的新神经网络算法来求解二维含静态裂缝线弹性问题。利用区域分解思想，构建了多个互相独立的神经网络处理裂缝处位移场的强间断性。进一步，通过在神经网络中引入裂尖渐近场函数准确捕捉裂尖处应力场的强奇异性，从而显著提高计算精度。数值试验表明：在神经网络架构中只需采用少量的隐藏层和神经元个数时，我们的算法就能获得理想的计算精度。此外，由于裂尖渐近场函数的引入，在裂缝处增大采样点个数时，计算精度并没有明显的改善，只需要较少的采样点就能达到较高的计算精度。下一步，我们将尝试把相关算法推广应用到多裂缝相交和裂缝扩展等复杂计算模型。

参考文献

- [1] 许学军. 有限元方法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [2] RAMOS L F C, MARTHA. Topological and geometrical modeling approach to numerical discretization and arbitrary fracture simulation in three dimensions[D]. Ithaca, NY: Cornell University, 1989.
- [3] BELYTCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 45(5): 601-620.
- [4] 余天堂. 扩展有限单元法[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [5] 吴国正, 王发杰, 程隋福等. 基于物理信息神经网络的内部声场正问题数值计算[J]. 计算物理, 2022, 39(6): 687-698.
- [6] 郭嘉玮, 王涵, 谷同祥. 求解时间发展方程的机器学习方法[J]. 计算物理, 2024, 41(6): 772-782.

- [7] 郑素佩, 林云云, 封建湖等. 浅水波方程的黏性正则化 PINN 算法[J]. 计算物理, 2023, 40(3): 314-324.
- [8] RAISSI M, PERDIKARIS P, KARNIAD AKIS G E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 378(1): 686-707.
- [9] VON RUEDEN L, MAYER S, BECKH K, et al. Informed machine learning - a taxonomy and survey of integrating prior knowledge into learning systems[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2021, 35(1): 614-633.
- [10] CUOMO S, SCHIANO DI COLA V, GIAMPAOLO F, et al. Scientific machine learning through physics-informed neural networks: Where we are and what's next[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2022, 92(3): 88-150.
- [11] CAI S, MAO Z, WANG Z, et al. Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: A review[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2021, 37(12): 1727-1738.
- [12] HAGHIGHAT E, RAISSI M, MOURE A, et al. A physics-informed deep learning framework for inversion and surrogate modeling in solid mechanics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 379: 113741.
- [13] RAO C, SUN H, LIU Y. Physics-informed deep learning for computational elastodynamics without labeled data[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2021, 147(8): 04021043.
- [14] GOSWAMI S, ANITESCU C, CHAKRABORTY S, et al. Transfer learning enhanced physics informed neural network for phase-field modeling of fracture[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, 106: 102447.
- [15] GU Y, ZHANG C, ZHANG P, et al. Enriched physics-informed neural networks for 2D in-plane crack analysis: Theory and MATLAB code[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2023, 276: 112321.
- [16] 师访. 扩展有限元理论及 FORTRAN 编程[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2020.
- [17] FARAHANI B V, MELO F Q D, TAVRES P J, et al. New Approaches on the Stress Intensity Factor characterization-review[J]. *Procedia Structural Integrity*, 2020, 28: 226-233.
- [18] KING D, BA J. A method for stochastic optimization[C]. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Learning Representations (ICLR)*, San Diego, California, 2015.
- [19] PERMANN C J, GASTON D R, ANDRS D, et al. MOOSE: Enabling massively parallel multiphysics simulation[J]. *SoftwareX*, 2020, 11: 100430-100435.